RÉPUBLIQUE TUNISIENNE

***

Ministère de l'Enseignement Supérieur

Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session : Juin 2000

Concours en Mathématiques et Physique

Épreuve de Mathématiques I

Durée : 4H	Date : 5 Juin 2000	8Heure	Nb pages : 4
Barême : Partie I : 6pts	Partie II : 7pts.	Partie III : 7pts	

L'usage des calculatrices est strictement interdit.

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté de la rédaction et au soin de la présentation. Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le sujet peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

Pour la suite on note E l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables en 0, E' le sous-espace de E formé des fonctions de classe C^1 et E'' le sous-espace de E' formé des fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}^*$.

Partie I

Pour $f \in E$, on pose $T(f) = F$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \cos(x-t)f(t)dt & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. a) Montrer que pour $x \neq 0$ et $f \in E$,

$$(1) \qquad T(f)(x) = F(x) = \frac{\cos x}{x}\int_0^x f(t)\ \cos t dt + \frac{\sin x}{x}\int_0^x f(t)\ \sin t dt.$$

   b) En déduire que $T(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $f \in E$, montrer que $\lim\limits_{x\to 0} F'(x)$ existe et en déduire que $F \in E'$ et donner la valeur de $F'(0)$.

3. Calculer $T(f)$, pour $f(x) = |x|$. Que peut-on conclure ?

b) Calculer f' en utilisant la relation (1) et en déduire que T est injective sur E.

7. Soit $g \in E'$ et

$$(2) \qquad f(x) = \int_0^x tg(t)dt + xg'(x) + g(x).$$

 a) Montrer que $f \in E$ et $T(f) = g$.

 b) En déduire que T est un isomorphisme de E dans E'.

8. Soit $f \in E'$. montrer que $F = T(f)$ est dans E'' et que F vérifie sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$xy'' + 2y' + xy = f'$$

9. Donner les solutions dans E'' de l'équation différentielle $xy'' + 2y' + xy = 0$. (*On pourra poser $z = xy$.*)

Partie II

1. Soit $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. On suppose que $T(f) = \lambda f$. Montrer que

 a) $f \in E''$.

 b) f vérifie sur $\mathbb{R}^*$ l'équation differentielle

$$(D_\lambda). \qquad xy'' + \frac{2\lambda - 1}{\lambda}y' + xy = 0$$

 c) Si $\lambda \neq 1$, alors $f(0) = 0$.

2. Inversement

 a) Montrer que si $f \in E''$ solution dans $\mathbb{R}^*$ de l'équation (D_1), alors $T(f) = f$. (*On pourra prendre après justification $g \in E$ telle que $T(g) = f$.*)

 b) Montrer que si $f \in E''$ solution dans $\mathbb{R}^*$ de l'équation (D_λ), avec $\lambda \neq 1$ et $f(0) = 0$, alors $T(f) = \lambda f$.

3. Donner les fonctions f de E'' qui vérifient $T(f) = \frac{1}{2}f$.

4. Montrer que pour tout réel $\lambda \neq \dfrac{1}{2n+1}$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda \neq \frac{1}{2}$, l'équation $\mathcal{D}_\lambda$ admet une solution développable en série entière dont on précisera son rayon de convergence. (*On ne demande pas de calculer les coefficients de ce développement*).

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner une série entière de la forme

$$y_n(x) = x^{2n} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k, \quad \text{avec } a_0 = \frac{1}{n!}$$

qui converge sur $\mathbb{R}$ et telle que $T(y_n) = \dfrac{1}{2n+1}\, y_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on définit les fonctions $(J_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ continues sur $\mathbb{R}$ par :

$$J_0(x) = y_0(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{4^k(k!)^2}x^{2k}, \quad y_n = (2x)^n J_n, \quad J_{-n}(x) = (-1)^n J_n, \quad \text{si } n \in \mathbb{N}^*$$

7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction J_n est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}_n). \qquad x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - n^2)y(x) = 0$$

8. a) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, développer en série entière la fonction $x \longrightarrow \cos(x\sin\theta)$.

   b) En déduire que

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta)\, d\theta.$$

   On rappelle que $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^{2k} t dt = \frac{(2k)!}{4^k(k!)^2}\pi.$

Partie III

(On convient de noter $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{-\infty}^{-1} a_n$ pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ si les deux séries $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ et $\sum_{-\infty}^{-1} a_n$ sont convergentes.)

1. a) Montrer en utilisant les relations de la question II-6-b) que pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$xJ_{n+1} - 2nJ_n + xJ_{n-1} = 0.$$

   b) Vérifier aussi que pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$xJ_n' = -nJ_n + xJ_{n-1} \quad \text{et} \quad xJ_n' = nJ_n - xJ_{n+1}.$$

   On définit l'application ψ sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\psi(x,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x)e^{in\theta}.$$

2. Montrer que ψ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. (*On pourra montrer que cette série, ainsi que les deux séries obtenues en dérivant terme à terme respectivement par rapport à θ et par rapport à x convergent uniformément sur $[-A, A] \times \mathbb{R}$, pour tout $A > 0$.*)

3. a) En utilisant les relations de la question III-1, montrer que pour tout $(x, \theta) \in \mathbb{R}^2$;

$$\mathrm{i}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}(x,\theta) = -x\psi(x,\theta)\cos\theta \quad \text{et} \quad x\frac{\partial \psi}{\partial x}(x,\theta) = \mathrm{i}x\sin\theta\psi(x,\theta).$$

b) Soit $g(x,\theta) = \psi(x,\theta)e^{-\mathrm{i}x\sin\theta}$. Calculer $\frac{\partial g}{\partial \theta}(x,\theta)$.

c) En déduire que $\psi(x,\theta) = e^{\mathrm{i}x\sin\theta}$ et que $J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin\theta - n\theta)d\theta$.

Pour tout $\lambda > 0$, on considère l'équation sur $\mathbb{R}^2$

(E_λ) $$\Delta U + \lambda U = 0$$

(On rappelle l'expression du Laplacien Δ dans $\mathbb{R}^2$; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ et en coordonnées polaires $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$.)

Soit U une solution de (E_λ) de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

4. Montrer qu'il existe une suite de fonctions $(C_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ définies sur $[0, +\infty[$ telles que

$$U(r\cos\theta, r\sin\theta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n(r)e^{in\theta}, \quad \forall\theta \in \mathbb{R}.$$

5. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, C_n est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, +\infty[$ et vérifie l'équation différentielle

$$r^2C_n''(r) + rC_n'(r) + (\lambda r^2 - n^2)C_n(r) = 0.$$

6. On pose $t = \sqrt{\lambda}r$. Montrer que pour toute suite bornée $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, la fonction $\varphi(r\cos\theta, r\sin\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n J_n(\sqrt{\lambda}r)e^{in\theta}$ est une solution de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ de l'équation (E_λ).

7. Donner deux solutions sur $\mathbb{R}^2$ de l'équation (E_λ), l'une ne dépend que de x et l'autre ne dépend que de y.